Электрон

Д. В. Гламазда
Уральский федеральный университет, Екатеринбург

26 марта 2018 г.

Аннотация

В состав поля движения, описывающего электрон в собственной системе отсчета, входят два поля различного типа. Поле с мнимой плотностью импульса зависит от одной координаты и представляет собой поле радиальных колебаний. Благодаря ему электрон имеет конечную массу. Второе поле обладает только вещественными плотностями динамических переменных и формально зависит от всех четырех координат: времени, радиуса и углов. Оно обеспечивает электрон собственным угловым моментом – спином.

Ключевые слова: электрон, спин, квантовая теория полей движения.

1 Введение

В книге [1] получен достаточно большой ассортимент полей движения, как радиальных, так и вращательных. Особое место среди первых занимают *квадратично интегрируемые* поля. С их помощью, в частности, удается построить теорию массы частиц. Было найдено три радиальных «массообразующих» поля, которые в естественной для них сферической системе координат выглядят следующим образом:

$$u_1(r) = c_1 \frac{e^{-kr}}{r}, \qquad u_2(r) = c_2 \frac{K_0(kr)}{\sqrt{r}}, \qquad u_3(r) = c_3 \frac{K_{1/\sqrt{2}}(kr)}{\sqrt{r}}. \tag{1}$$

Здесь K_ν – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда), а под k подразумевается волновое число:

$$k = \frac{mc}{\hbar},$$

где m – масса. Все волновые функции (1) получены при решении задачи с разделением переменных, так что формально они связаны через индекс ν функции Макдональда с соответствующими полями вращений, зависящими от углов θ, φ и описывающими спин. Однако численно спин углового поля, генетически связанного с радиальным полем $u_1(r)$, оказался равным 0. Следовательно, решение $u_1(r)$, взятое отдельно, относится к бесспиновым (скалярным) полям движения. Что касается спина, связанного тем же образом с полями $u_2(r)$ и $u_3(r)$, то в обоих случаях он равен $1/2$ (в единицах $\hbar$). В паре с этими полями должны использоваться поля вращения специального вида, о которых рассказано ниже.

Математический аппарат квантовой теории полей движения (КТПД) для описания любых полей движения использует однокомпонентные волновые функции (ВФ). Не является исключением и описание момента импульса, как орбитального, так и собственного (спина). Если независимо от происхождения обозначить угловой момент через M, то уравнение, описывающее поля вращения, может иметь два вида:

$$\Delta_{\theta,\varphi}\chi + \frac{M^2}{\hbar^2}\chi = 0 \qquad \text{и} \qquad \Delta_{\theta,\varphi}\chi - \frac{M^2}{\hbar^2}\chi = 0. \tag{2}$$

Здесь

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

есть так называемый оператор Бельтрами-Лапласа, являющийся «угловой частью» оператора Лапласа. Левое уравнение в (2) соответствует вещественной плотности импульса поля движения, а правое – мнимой. Тем не менее, в обоих случаях выдвигается требование вещественности углового момента, т.е. $M^2 \geqslant 0$. Общее решение (2) имеет вид

$$\chi(\theta,\varphi) = \left[a_p P_\nu^\mu(\cos\theta) + a_q Q_\nu^\mu(\cos\theta)\right] e^{i\mu\varphi}, \tag{3}$$

где P_ν^μ, Q_ν^μ – присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно, a_p, a_q – произвольные константы. Из требования однозначности наблюдаемых следует, что степень ν и порядок μ (см. [2]) функций Лежандра могут принимать только целые или полуцелые значения. Никаких других ограничений на значения этих *квантовых чисел* нет, если не считать неочевидное требование положительности ν и требование $|\mu| \leqslant \nu$. Важным частным случаем решений, соответствующих спину 1/2 при вещественной плотности импульса, являются функции с $\nu = 1/2$, $\mu = \pm 1/2$:

$$\begin{aligned} \sigma_+(\theta,\varphi) &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,e^{i\varphi/2}, \qquad & \sigma_+(\theta,\varphi) &= \sqrt{\sin\theta}\,e^{i\varphi/2}; \\ \sigma_-(\theta,\varphi) &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,e^{-i\varphi/2}, \qquad & \sigma_-(\theta,\varphi) &= \sqrt{\sin\theta}\,e^{-i\varphi/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для удобства поля́ движения, описывающие *собственный* момент импульса, в [1] принято обозначать символом σ. Для функций *орбитального* углового момента специального обозначения нет. Здесь функции σ_+ относятся к ориентации спина вверх, а функции σ_- – к ориентации вниз. Что касается пространственной четности этих полей движения, то легко убедиться, что в каждой из строк в (4) первая функция является нечетной, а вторая – четной. Тем самым, всегда можно выбрать пару функций со спином вверх и вниз, имеющих одинаковую четность.

Иначе выглядят решения второго уравнения из (2), связанного с мнимой плотностью импульса. Если не считать случая нулевого спина, то физически возможным оказывается лишь решение, соответствующее спину 1/2. В нем используется присоединенная функция Лежандра с необычными степенью и порядком: $\nu = -1/2$, $\mu = \pm 1/2$. В результате волновые функции со спином вверх и вниз отличаются не только знаком в показателе экспоненты:

$$\sigma_+ = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,e^{i\varphi/2}, \qquad \sigma_- = \frac{\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,e^{-i\varphi/2}. \tag{5}$$

Эти поля движения были получены в паре с радиальными полями $u_2(r)$ и $u_3(r)$. Именно благодаря им радиальные поля оказались квадратично интегрируемыми. Первая из функций (5) является пространственно четной, а вторая не имеет определенной четности («аморфная»). Таким образом, при смене ориентации спина поле движения не сохраняет четность.

Найденные в книге [1] поля движения представляют своеобразный набор, из которого можно конструировать простейшие элементарные частицы, такие, например, как электрон. Однако, в книге эта задача не решена в окончательном виде. А именно, не было записано полное выражение для поля движения, описывающего электрон. Чтобы решить эту задачу, необходимо найти ответ на вопрос: какие из вращательных полей движения – (4) или (5) – следует использовать в ВФ электрона[1]? Правда, a priori ответ может быть неоднозначным: что мешает электрону время от времени находиться в различных «внутренних» состояниях, которым будут соответствовать различные значения s и s_z? В атоме он мог бы иметь одни квантовые числа углового момента, в свободном состоянии – другие. В статье [3] автора, посвященной применению нового формализма к теории водородоподобного атома, по умолчанию используются привычные «атомные» значения $\nu = s = 1/2$ и $\mu = s_z = \pm 1/2$. Их способно дать поле вращения (4). Эта «традиция» продолжается и в главе 4 книги [1], в которой развивается та же тема на более глубоком уровне. Но здесь возникает проблема: как раз приведенных выше значений s, s_z нет среди найденных *квадратично интегрируемых* решений! Если в качестве массообразующего поля взять $u_2(r)$ или $u_3(r)$, то спиновым полем придется выбирать генетически связанное с ними поле вращения (5). Оно ничуть не менее физично, чем поле (4) и также соответствует спину 1/2. Но оно описывает поле вращения *без прецессии*, что сильно уменьшает вероятность встретить его в микромире, полном возмущений. Кроме того, оно нарушает четность при смене знака s_z. Оставшееся радиальное поле $u_1(r)$ («потенциал Юкавы»), как мы помним, было найдено для спина $s = 0$. Так где взять поле вращения с $s = +1/2$, характерное для наиболее распространенного внутреннего состояния электрона – того, которое он обычно имеет, находясь в атоме?

2 Электрон как суперпозиция полей движения

В квантовой теории полей движения допускается комплексный характер плотностей динамических переменных. Это влечет за собой использование не только эрмитовых операторов. Универсальное уравнение динамики полей движения выглядит следующим образом [1]:

$$\hat{P}^{\circledast}_{\mu} \hat{P}^{\mu} \Psi = 0. \tag{6}$$

Здесь $\hat{P}^{\mu}$ – оператор обобщенного 4-импульса, который выделяет не только вещественный, но и мнимый импульс. Значок $\circledast$ означает *ограниченное* комплексное сопряжение. Оно ничем не отличается от обычного комплексного сопряжения, за исключением того, что не действует на «служебные» мнимые единицы i в операторах, входящих в $\hat{P}^{\mu}$. Уравнение (6) имеет эквивалентную запись

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} - \bar{\partial}_{\mu} \bar{\partial}^{\mu}) \Psi = 0, \tag{7}$$

[1] Автор благодарен В. Дуднику, обратившему внимание на это обстоятельство.

где производные без верхней черточки действуют на парциальные поля с вещественной плотностью импульса, а производные с черточкой – на поля с мнимой плотностью импульса. Как обычно, полагается

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \bar{\partial}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}, \qquad \bar{\partial}^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\mu}.$$

Координаты $\bar{x}^\mu$ полей с мнимой плотностью импульса определены в том же пространстве Минковского, что и координаты x^μ. С точки зрения геометрии между $\bar{x}^\mu$ и x^μ можно установить связь, но с физической точки зрения они независимы, поскольку независимы поля, аргументами которых они являются.

Задачу удобно решать в сферической системе координат. Обсудим парциальный состав общего поля движения Ψ. Электрон имеет массу, поэтому в состав Ψ должно входить «массообразующее» поле радиальных колебаний с мнимой плотностью импульса. Обозначим его через $u(\bar{r})$. Как выяснилось в конце предыдущего раздела, в его качестве мы не можем взять $u_2(\bar{r})$ или $u_3(\bar{r})$ из (1), т.к. генетически связанное с ними поле вращений σ имеет $s=-1/2$, в то время как для электрона в атоме нам необходимо $s=+1/2$. Следовательно, мы *вынуждены* взять его в «бесспиновом» виде

$$u(\bar{r}) = \frac{e^{-k\bar{r}}}{\bar{r}}, \tag{8}$$

с условием, что угловой момент общему полю Ψ обеспечит некоторое дополнительное поле движения, которое мы обозначим ψ. От последнего не требуется обладания массой, поэтому его плотность импульса может быть вещественной. Выбираем парциальное поле движения $\psi(t,\boldsymbol{r})$ *стационарным*, что вносит определенность в зависимость от времени:

$$\psi = e^{-i\omega t}\phi(\boldsymbol{r}).$$

В свою очередь, поле ϕ можно представить состоящим из поля вращения $\sigma(\theta,\varphi)$, дающего необходимые s, s_z, и дополнительного радиального поля $R(r)$. В итоге получаем

$$\psi = e^{-i\omega t}R(r)\,\sigma(\theta,\varphi),$$

где поле σ, согласно нашим желаниям, должно иметь квантовые числа $s=1/2$, $s_z=\pm1/2$. Таким свойством обладают поля вращения (4), из которых следует образовывать пары, в которые войдут поля с одинаковой пространственной четностью, но различной ориентацией спина. Полное поле движения приобретает в собственной системе отсчета следующий вид:

$$\Psi = u\psi = u(\bar{r})\,e^{-i\omega t}R(r)\,\sigma(\theta,\varphi). \tag{9}$$

Подставляем его в уравнение (7):

$$\partial_\mu\partial^\mu(u\psi) - \bar{\partial}_\mu\bar{\partial}^\mu(u\psi) = 0.$$

Учитывая, что производные действуют только на функции со «своими» координатами, получаем

$$u\partial_\mu\partial^\mu\psi = \psi\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}^\mu u,$$

Поделим обе части на $u\psi$:

$$\frac{1}{\psi}\,\partial_\mu\partial^\mu\psi = \frac{1}{u}\,\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}^\mu u.$$

Левая часть зависит только от x^μ, а правая – только от $\bar{x}^\mu$, но они тождественно равны. Это возможно только в случае, если они равны одной и той же константе. Обозначим эту *постоянную разделения переменных* через γ, после чего получаем два независимых уравнения:

$$\begin{cases} \partial_\mu\partial^\mu\psi - \gamma\psi = 0, \\ \bar{\partial}_\mu\bar{\partial}^\mu u - \gamma u = 0. \end{cases} \tag{10}$$

«Массообразующее» поле $u(\bar{r})$ из (8) зависит только от одной координаты $\bar{r}$ и удовлетворяет [1] уравнению

$$\bar{\Delta}u - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}u = 0. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{t}^2} - \bar{\Delta},$$

и сравнивая второе уравнение из (10) с соотношением (11), находим, что

$$\gamma = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}.$$

После этого для поля ψ получаем уравнение Клейна-Гордона-Фока:

$$\partial_\mu\partial^\mu\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{12}$$

Полагаем

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar},$$

после чего из

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{e^{-i\omega t}\phi(\boldsymbol{r})\right\} - \Delta\left\{e^{-i\omega t}\phi(\boldsymbol{r})\right\} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left\{e^{-i\omega t}\phi(\boldsymbol{r})\right\} = 0$$

останется уравнение Лапласа

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{13}$$

Вспоминая, что в состав $\phi(\boldsymbol{r})$ входят парциальные поля $R(r)$ и $\sigma(\theta,\varphi)$, в сферических координатах получаем:

$$\sigma\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2\sigma}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\sigma = 0.$$

После разделения переменных с новой константой разделения γ' получаем отдельные уравнения для $R(r)$ и $\sigma(\theta,\varphi)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2R}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dR}{dr} - \dfrac{\gamma'}{r^2}R = 0, \\ \Delta_{\theta,\varphi}\sigma + \gamma'\sigma = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Второму уравнению удовлетворяют выбранные выше решения из (4), причем

$$\gamma' = s(s+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}.$$

Оставшееся уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{s(s+1)}{r^2}R = 0 \tag{15}$$

для радиального поля $R(r)$ по форме является уравнением Эйлера [4]

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

В нашем случае $a = 2$, $b = -3/4$. При таких параметрах решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = |x|^{\frac{1-a}{2}}\left(C_1|x|^{\mu} + C_2|x|^{-\mu}\right),$$

где

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{|(1-a)^2 - 4b|} = 1.$$

Соответственно,

$$R(r) = c_1\sqrt{r} + \frac{c_2}{r^{3/2}}, \tag{16}$$

где c_1, c_2 – произвольные константы, любую из которых мы вольны обнулять при необходимости. В частности, если мы хотим, чтобы поле $R(r)$ монотонно убывало с расстоянием, то полагаем $c_1 = 0$.

Таким образом, полное выражение для поля движения, соответствующего электрону в собственной системе отсчета, есть[2]

$$\Psi = u\,e^{-i\omega t}R\sigma = \frac{e^{-k\bar{r}}}{\bar{r}}\,e^{-i\omega t}\left(c_1\sqrt{r} + \frac{c_2}{r^{3/2}}\right)\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\\[2ex] \sqrt{\sin\theta}\end{array}\right\}e^{\pm i\varphi/2}. \tag{17}$$

Как мы видели в (10), поля движения u и ψ разделяются, и в обычных квантово-механических задачах приходится работать со вторым полем. Поэтому для ссылок выпишем и его полный вид:

$$\psi = e^{-i\omega t}\left(c_1\sqrt{r} + \frac{c_2}{r^{3/2}}\right)\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\\[2ex] \sqrt{\sin\theta}\end{array}\right\}e^{\pm i\varphi/2}, \qquad \omega = \frac{mc^2}{\hbar}. \tag{18}$$

Если выбрать зависимость по θ из верхней строки в фигурных скобках, получается пространственно нечетная ВФ, а если по нижней, то четная. Поскольку, согласно КТПД, наблюдаемые значения динамических переменных вычисляются с помощью *интеграла* по пространству от соответствующих плотностей, то сферически симметричное радиальное поле $R(r)$ не дает наблюдаемого импульса. В силу (13) зависящее от пространственных координат поле $\phi = R\sigma$ не имеет также и наблюдаемого квадрата импульса (кинетической энергии). Действующими физическими величинами являются энергия mc^2 и угловой момент $\hbar/2$.

[2]Фигурные скобки означают, что между записями, помещенными в них, следует подразумевать связь «или».

3 Заключение

Если рассматривать второе поле $\psi(x^\mu)$ просто как некое поле движения, обладающее энергией и угловым моментом, то радиальному полю $R(r)$ в нем достается роль задавать его очертания в пространстве, т.е. амплитуду в зависимости от расстояния до центра. Подобную роль, но с зависимостью от углов, выполняет в нем поле $\sigma(\theta,\varphi)$.

При переходе в систему отсчета, относительно которой электрон движется, ключевую роль играет мнимая экспонента с зависимостью от времени. Происходит трансформация

$$\omega t \quad \longrightarrow \quad \omega' t' - \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r}',$$

что ведет к формированию волны де Бройля

$$\psi' \sim e^{-i(\omega' t' - \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r}')}.$$

В [1] показано, что при этом энергия и импульс образовавшегося нового поля движения ψ' находятся в полном соответствии с требованиями квантовой механики. А использование поля вращения σ с $s = 1/2$ и $s_z = \pm 1/2$ в теории водородоподобного атома приводит к известным подтверждаемым на практике результатам.

Что касается невостребованных в теории атома полей движения с радиальными частями u_2, u_3 и угловыми частями (5), нарушающими пространственную четность при переориентации спина, то их, по-видимому, следует отнести к другим, относительно редким внутренним состояниям электрона, возникновение и смена которых тесно связаны с существованием в Природе *нейтрино*.

Список литературы

[1] Гламазда Д. В. Квантовая теория полей движения, т.1. – Екатеринбург : ООО Издательство и типография «Альфа Принт», 2017.

[2] Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1979.

[3] Гламазда Д. В. Применение нового формализма к решению задач об одноэлектронном атоме. Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т.6, №4(153). С.528–542.

[4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Факториал, 1997.